УДК 519.6

В.І. МЕЖУЄВ, канд. пед. наук, доц., БДПУ, Бердянськ;
О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УІПА, Харків;
О.О. ЛИТВИН, канд. фіз.-мат. наук, доц., УІПА, Харків

МЕТОД РОЗРОБКИ МЕТАМОДЕЛЕЙ НА ОСНОВІ ЛОГІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПРЕДМЕТНИХ ОБЛАСТЕЙ

Відомий метод R - функцій В.Л. Рвачова для розв'язання задач аналітичної геометрії використовує множини функцій кількох змінних, що мають властивості, тісно пов'язані з властивостями булевих функцій. В даній роботі для розробки метамоделей пропонується використовувати теж логічні моделі предметних областей. Розглянуто приклад.

Известный метод R -функций В.Л. Рвачова для решения задач аналитической геометрии использует множества функций нескольких переменных, которые обладают свойствами, тесно связанными со свойствами булевых функций. В данной работе для разработки метамоделей также предлагается использовать логические модели предметных областей. Рассмотрен пример.

The well-known method of R -functions of V. Rvachov for solving problems of analytic geometry, uses a set of functions of several variables which have properties, closely associated with properties of Boolean functions. In this work it is also suggested to use the logical models of subject domains for metamodels development. An example is considered.

Вступ. В інформаційній технології (ІТ) предметно-орієнтованого математичного моделювання *DSMM* (*Domain Specific Mathematical Modelling*) [1; 6] під *метамоделлю* розуміється формальна система, що визначає специфічну для предметної області (ПрО) мову моделювання. У наших попередніх дослідженнях була запропонована узагальнена модель метамоделі, що включає множини типових елементів ПрО, правил граматики та операцій над множинами типових елементів [1]. В ІТ DSMM визначаються наступні формальні системи: мета-мета-метамодель ($M4$), мета-метамодель ($M3$) та метамодель ($M2$), що слугують, відповідно, для побудови мета-метамоделей ($M3$), метамоделей ($M2$) та моделей ПрО ($M1$).

У статті пропонується метод розробки метамоделей у рамках алгебраїчних систем, що дозволяє застосувати методи сучасної алгебри для розв'язання виникаючих у ПрО задач. Створення метамоделі здійснюється на основі логічних моделей ПрО, що надаються, зокрема, у рамках логіки висловлювань та логіки предикатів. Такий підхід дозволяє визначити метамодель як особливого виду логіко-алгебраїчну систему.

Як приклад, у даній роботі на основі векторної алгебри будується метамодель для логічних моделей ПрО, формалізованих у рамках логіки висловлювань; на засадах алгебри поліномів будується метамодель для моделей ПрО, визначених за допомогою системи булевих функцій. У першому випадку множина операцій векторної алгебри застосовується для визначення системи логічного виведення, що дозволяє використати запропонований метод в оптичних комп’ютерах для автоматичного доведення теорем [7]. У другому випадку доводиться, що занурення булевої логіки в алгебру поліномів дозволяє суттєво підвищити ефективність розв’язання задач над ПрО, що ілюструється на прикладі обчислення степеневої функції. Зазначимо, що запропонований підхід має багато спільного з методом занурення ПрО аналітичної геометрії в множину булевих функцій шляхом виділення у множині функцій двох і більше змінних підмножини *R – функцій В.Л. Рвачова* (дивись, зокрема [3]), що дозволило створити метод опису рівнянь границь областей складної форми; інший приклад демонструє занурення ПрО в евклідовий простір, що досліджувалося у роботах *Ю.Г. Стояна* та його учнів (див., зокрема[4]).

Постановка задачі. Побудова метамоделі здійснюється на основі аналізу атрибутів, функцій, структури та інших властивостей моделі ПрО. У залежності від виду моделей ПрО, взагалі кажучи, можна виділити два підходи до створення метамоделей:

- алгебраїчний (або безпосередній), що здійснюється на підставі аналізу моделей ПрО, як частини дійсності;
- логічний (або опосередкований), що здійснюється на підставі аналізу моделей знань про ПрО.

У першому випадку входом методу для побудови метамоделі є атрибути, структура, правила, операції та інші елементи моделі ПрО, що надані у формі фізичних величин, випадкових процесів, математичних функцій, фізичних законів та тому подібне. У другому випадку метамоделі будуються на основі моделей знань про ПрО (зокрема, семантичної мережі, продукційної, фреймової, логічної моделі тощо). Зазначимо, що можливим є існування змішаних випадків, коли входом методу для побудови метамоделі є водночас як алгебраїчні так і логічні моделі ПрО.

У даній роботі розглядається метод розробки метамоделей на основі логічних моделей ПрО, що має важливе окреме значення у рамках сучасних ІТ. Сутність підходу полягає у зануренні логічної моделі ПрО у деяку алгебраїчну систему, що розглядається як *мета-метамодель* для побудови метамоделі. Таким чином, логічна модель ПрО розглядається як *мета-мета-метамодель* ($M4$) для побудови мета-метамоделі ($M3$).

Логічна модель ПрО є множиною тверджень про властивості ПрО, що подаються як формули у деякій логіці. Зазвичай, логічна модель ПрО також включає аксіоми та процедури виведення, що дозволяють отримати нові знання про ПрО.

Таким чином, логічну модель ПрО можна визначити як формальну систему:

$$\Lambda = \left\langle \Lambda_p, \Lambda_F, \Lambda_R, \Lambda_A \right\rangle \quad (1),$$

де Λ_p – множина символів логічної моделі Λ ПрО (що слугує алфавітом мета-мета-метамоделі $M4$); Λ_F – множина операцій над Λ_p; Λ_R - множина відношень між побудованими за допомогою Λ_F формулами, що визначають правила виведення; Λ_A – множина аксіом (апріорі істинних формул).

Розглянемо мета-метамодель як особливого виду алгебраїчну систему, тобто множину з заданим на ній набором операцій та відношень, що задовольняють деякій системі аксіом. Відповідно до цього, визначимо мета-метамодель як кортеж:

$$\Omega = \langle \Omega_T, \Omega_F, \Omega_R, \Omega_A \rangle, \tag{2}$$

де Ω_T є непорожньою множиною, що є носієм алгебраїчної системи (мета-метамоделі *M3*); Ω_F - множиною заданих на Ω_T алгебраїчних операцій; Ω_R - множиною заданих на Ω_T відношень; Ω_A - множиною аксіом.

З формули (2) випливає, що розробка мета-метамоделі на основі логічної моделі ПрО (1) потребує визначення носія алгебраїчної системи Ω_T, а також множин заданих на Ω_T алгебраїчних операцій та відношень. Особливістю визначення мета-метамоделі (2) є розгляд множини заданих на Ω_T відношень Ω_R як правил граматики, що визначають способи поєднання екземплярів Ω_T.

Зазначимо, що побудована як алгебраїчна система Ω, мета-метамодель $M3$ має відповідати наступній властивості:

для метамоделей $M4$ як Λ, та $M3$ як Ω має місце гомоморфізм, що зберігає операції над множинами Λ_p та Ω_T.

$$M_{43} : \Lambda_p \to \Omega_T, \quad M_{43} \subseteq \Lambda_p \times \Omega_T. \tag{3}$$

Тобто операції, визначені на Λ_p, є застосовними для еквівалентних елементів множини Ω_T.

Розглянемо практичні способи визначення алгебраїчних мета-мета - моделей для різного роду логічних систем, що відповідають критерію (3).

Побудова мета моделі для логіки висловлювань (логіки нульового порядку). Логіка висловлювань є формальною системою, в якій логічні формули, що відповідають висловленням про властивості ПрО, утворюються шляхом поєднання простих висловлювань за допомогою множини логічних операцій. Логіка висловлювань також включає систему правил виведення, в якій певні формули визначаються як теореми даної формальної системи.

Таким чином, визначення логіки висловлювань знаходиться у рамках загального визначення (1), де:

Λ_p є скінченною множиною елементарних висловлювань, для позначення яких у логічній моделі ПрО зазвичай використовують малі латинські літери: $a, b, c, ..., x, y, z$;

Λ_F є скінченною множиною логічних операцій, $\Lambda_F = \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$;

Λ_R є скінченною множиною правил виведення, що дозволяють одержувати нові формули з існуючих;

Λ_A є скінченною множиною аксіом. В окремому випадку, $\Lambda_F = \varnothing$.

Як зазначалося раніше, особливістю визначення метамоделі на основі формули (1) є розгляд Λ_R як правил граматики мови моделювання ПрО.

1. Алфавітом мови є множина P, що складається з елементарних висловлювань. Всі елементи множини P є формулами;

2. Якщо $a_1, a_2, ..., a_n$ є формулами та $f \in \Omega_n$, то $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ теж є формулою. Наприклад, якщо a і b є формули, то вирази $a \vee b$, $a \wedge b$, $\neg a$, $a \rightarrow b$ також є формулами;

3. Інших формул, ніж побудовані за правилами 1 і 2, немає.

Побудова алгебраїчної мета-метамоделі для логіки висловлювань потребує встановлення відношень між носіями алгебраїчної та логічної систем, у даному прикладі, елементами множини елементарних висловлювань Λ_p логіки Λ та елементами множини Ω_T, як носія алгебраїчної системи Ω. Відповідно до (3), такі відношення повинні бути гомоморфними, що дозволяє використати для елементів множини Λ_p визначені на Ω_T алгебраїчні операції.

Розглянемо приклад побудови основаної на векторній алгебрі мета-метамоделі V для логіки висловлювань Λ. Зазначимо, що вибір алгебраїчної системи для побудови мета-метамоделі визначається властивостями ПрО та задачами, які необхідно розв’язати над ПрО. У даному випадку вибір векторної алгебри зумовлений потребами практики, а саме можливістю застосування наявного технічного обладнання для реалізації логіки висловлювань. Конкретно кажучи, вектори можуть бути реалізовані як промені лазерів оптичного комп’ютера, де операція сумування векторів має фізичну природу інтерференції оптичних хвиль [4, 5].

Визначимо векторну мета-метамодель у булевому просторі $B^2 = \{0,1\}$ як

$$\mathrm{V} = \left\langle B^n ;+;-;G \right\rangle \quad (4),$$

де B^n є *декартова степінь* множини {0, 1}; «+» - операція сумування векторів, «-» - операція знаходження зворотного вектору; G – множина правил граматики (заданих як відношення над B^n). З рівності (4) випливає, що логічний вектор простору B^n метамоделі V задається кортежем довжиною n, який складається з нулів та одиниць: $\vec{a} = (a_1,...,a_n)$.

Введемо поняття нейтрального елемента для V: $\vec{0} = (0_1,...,0_n)$.

Визначимо наступні операції.

1. Знаходження зворотного елемента (унарний «-»): $-\vec{a}$

$$-(a_1,...,a_n) = (\neg a_1,...,\neg a_n), \tag{5}$$

2. Множення логічних векторів (бінарний «+»): $\vec{a} * \vec{b}$

$$(a_1,...,a_n) * (b_1,...,b_n) = (a_1 \wedge b_1,...,a_n \wedge b_n), \tag{6}$$

3. Сумування логічних векторів (бінарний «+»): $\vec{a} + \vec{b}$

$$(a_1,...,a_n) + (b_1,...,b_n) = (a_1 \vee b_1,...,a_n \vee b_n). \tag{7}$$

Таким чином, особливістю визначення алгебраїчної операцій над логічними векторами є задання відповідних логічних операцій над кожною складовою логічного вектора окремо.

Твердження. *Використання визначеної як (4) векторної метамоделі дозволяє зменшити кількість операцій для побудови моделі ПрО в n разів, де n є -арністю логічного вектора.*

Доведення цього твердження випливає з визначення операцій (5),(6),(7) що здійснюються над логічним вектором -арності n як цілим, порівняно з опрацюванням кожної окремої складової логічного вектора. Іншими словами, якщо розглядати як операнд логічних операцій кожну окрему компоненту логічного вектора, то векторна логіка зводиться до булевої алгебри.

Розглянемо реалізацію логічних операцій на множині операцій з логічними векторами в одновимірному випадку.

Таблиця 1.

Множина операцій з логічними векторами в одновимірному випадку.
Одновимірний випадок реалізації логічних операцій

Булева алгебра					**Одновимірний випадок**				
x	y	$\neg x$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$-\vec{a}$	$\vec{a} * \vec{b}$	$\vec{a} + \vec{b}$
0	0	1	0	0	(0)	(0)	(1)	(0)	(0)
0	1	1	0	1	(0)	(1)	(1)	(0)	(1)
1	0	0	0	1	(1)	(0)	(0)	(0)	(1)
1	1	0	1	1	(1)	(1)	(0)	(1)	(1)

Розглянутий одновимірний випадок може бути перенесений на довільний компонент логічного вектора, тобто є застосовним для довільної кількості вимірів.

Таблиця 2.

Множина операцій з логічними векторами у двовимірному випадку. Двовимірний випадок реалізації логічних операцій

Двовимірний випадок				
$\vec{a}$	$\vec{b}$	$-\vec{a}$	$\vec{a} * \vec{b}$	$\vec{a} + \vec{b}$
(0, 0)	(0, 0)	(1, 1)	(0, 0)	(0, 0)
(0, 1)	(0, 0)	(1, 0)	(0, 0)	(0, 1)
(1, 0)	(0, 0)	(0, 1)	(0, 0)	(1, 0)
(1, 1)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(1, 1)
(0, 0)	(0, 1)	(1, 1)	(0, 0)	(0, 0)
(0, 1)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(0, 1)
(1, 0)	***(0, 1)***	***(0, 1)***	***(0, 0)***	***(1, 1)***
(1, 0)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 0)	(1, 1)
(1, 1)	(0, 1)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 1)
(0, 0)	(1, 0)	(1, 1)	(0, 0)	(1, 0)
(0, 1)	(1, 0)	(1, 0)	(0, 0)	(1, 1)
(1, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 0)
(1, 1)	(1, 0)	(0, 0)	(1, 0)	(1, 1)
(0, 0)	(1, 1)	(1, 1)	(0, 0)	(1, 1)
(0, 1)	(1, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)
(1, 0)	(1, 1)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
(1, 1)	(1, 1)	(0, 0)	(1, 1)	(1, 1)

На рис. наведений приклад сумування векторів $\vec{a} = (1,0)$ та $\vec{b} = (0,1)$ як виконання логічної операції «або» (відповідний рядок у таблиці 2 відформатований напівжирним шрифтом).

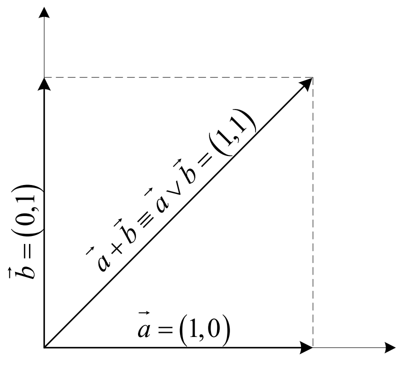

Рисунок – Приклад сумування векторів $\vec{a} = (1,0)$ та $\vec{b} = (0,1)$.

Зазначимо, що $\vec{b}=(0,1)=-(1,0)=-\vec{a}$. Розглянемо деякі інші властивості логічних векторів:

$$--\vec{a}=--(1,0)=-(0,1)=(1,0)=\vec{a},$$
$$\vec{a}+\vec{a}=(1,0)+(1,0)=(1,0)=\vec{a},$$
$$\vec{a}*\vec{a}=(1,0)*(1,0)=(1,0)=\vec{a}.$$

Побудова метамоделей для логіки предикатів (логіки першого порядку). Логіка предикатів є формальною системою, в якій допускаються висловлення відносно змінних, фіксованих функцій і предикатів. Логіка першого порядку Ψ є розширенням логіки висловлювань Λ.

Алфавіт мови логіки першого порядку Ψ будується на основі множин змінних $\{a,b,c,...,x,y,z\}$, функціональних символів F і предикатних символів P. Кожен функціональний і предикатний символ має визначену кількість аргументів (-арність). Для побудови виразів множина логічних операцій $\{\wedge,\vee,\neg,\rightarrow\}$ розширюється кванторами загальності $\forall$ та існування $\exists$, а також службовими символами: дужками і комою.

Множина змінних, символи з P і F утворюють *алфавіт* мови логіки першого порядку Ψ. Граматика мови визначається такими правилами:

- терм - це символ змінної або функція $f(t_1,t_2,...,t_n)$, де f - функціональний символ -арності n, а $t_1,t_2,...,t_n$ – терми;
- атом - $p(t_1,t_2,...,t_n)$, де p - предикатний символ -арності n, а $t_1,t_2,...,t_n$ – терми;
- формула є атомом, або однією з наступних конструкцій: $F_1 \vee F_2$, $F_1 \wedge F_2$, $\neg F$, $F_1 \rightarrow F_2$ $\forall xF$, $\exists xF$, де F,F_1,F_2 - формули, а x - змінна.

Наведемо метод побудови мета-метамоделі на основі моделі ПрО, наданої у рамках логіки предикатів Ψ. У загальному випадку метод включає три етапи.

1. Алфавіт моделі ПрО у рамках логіки предикатів розглядається як базова множина Ω_T алгебраїчної мета моделі Ω.
2. Кожен n-арний функціональний символ $f \in F$ перетворюється в n-арну функцію $\Omega_F(f): D_1 \times D_2 \times ... \times D_n \rightarrow D$.
3. Кожному n-арному предикатному символу $p \in P$ ставиться у відповідність n-арне відношення $\Omega_R(p) \subseteq D_1 \times D_2 \times ... \times D_n$.

Особливості визначення алгебраїчних операцій метамоделей. n-арна операція f на D – це відображення $f: D^n \rightarrow D$ декартового добутку n екземплярів множини в саму множину D. Окремий інтерес має *0*-арна операція $\left(f : D^0 \to D\right)$, що є виділенням елементу множини D.

Особливості визначення алгебраїчних відношень елементів метамоделей. n-місним відношенням над D є підмножина декартового степеня D^n множини D. Елементи $d_1, d_2, ..., d_n \in D$ знаходяться у відношенні R, якщо кортеж $\left(d_1, d_2, ..., d_n\right) \in D$. Оскільки відношення на D є також множинами, то для них можна застосовувати теоретико-множинні операції.

Наприклад, перетином бінарних відношень "більше або дорівнює" і "менше або дорівнює" є відношення "дорівнює", об'єднанням відношень "менше" і "більше" є відношення "не дорівнює", доповненням відношення "ділиться на" є відношення "не ділиться на" тощо.

Визначення атрибуту як унарного відношення. При $n = 1$ відношення $R \subseteq D$ є унарним відношенням, що будемо називати *атрибутом елементу* d множини D. Надалі будемо вважати, що елемент $d \in D$ має атрибут R, якщо $d \in R$ і $R \subseteq D$. Бінарне відношення на множині D встановлюється між двома елементами множини. Елементи $x, y \in D$ знаходяться у бінарному відношенні $R : aRb$, якщо впорядкована пара $\left(x, y\right) \in R$. Отже, R є підмножиною декартового квадрата: $R \subseteq D \times D$.

Розкриємо дані положення на прикладі моделі ПрО, наданої у рамках логіки першого порядку:

- 0-арні предикати логічної моделі ПрО стають елементами мета-метамоделі. Наприклад, МАШИНА, ВОДІЙ (на рівні побудови моделі приймають конкретні значення: Жигулі, Іванов);
- 1-арні предикати стають атрибутами об'єктів, наприклад СИНЯ (МАШИНА);
- 2 і більше -арні предикати визначають правила граматики, наприклад, ВЛАСНИК (ВОДІЙ, МАШИНА);
- частина предикатів класифікуються як функціональні й визначають синтаксис операцій метамоделі: кількість і тип параметрів, тип результату. Наприклад, РЕМОНТ (ВОДІЙ, МАШИНА).

Даний підхід дозволяє визначити синтаксис метамоделі (алфавіт, граматику й операції).

Розглянемо метод занурення булевої алгебри від *n* змінних у підмножину множини поліномів *n* змінних, які на множині B^n приймають лише значення 0 або 1.

Як відомо, через основні булеві операції кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення може бути виражена кожна булева операція. В той же час для вказаних базових булевих операцій справедливі наступні вирази через звичайні поліноми:

$$x \wedge y = xy,\ \ x \vee y = x + y - xy,\ \ \neg x = 1 - x\ .$$

Тобто справедлива тотожність на множині B^n :

$$\forall F : B^n \to B \quad \exists P : F(x_1,...,x_n) = P(x_1,...,x_n) \quad \forall\, (x_1,...,x_n) \in B^n ,$$

де $P(x_1,...,x_n)$ – поліном від n змінних.

Це твердження дозволяє запропонувати ефективний метод мінімізації булевих функцій. Суть цього методу полягає в наступному.

Введемо позначення:

$$P_k(x_1,...,x_n) = P_k F(x_1,...,x_n) = F|_{x_k=0}(1-x_k) + F|_{x_k=1}\, x_k , \quad k = 1,...,n .$$

1. Будуємо поліном у такому вигляді:

$$P(x_1,...,x_n) = \prod_{q=1}^{n} P_q F(x_1,...,x_n) . \qquad (8)$$

2. Використовуємо класичні методи спрощення поліномів, враховуючи також, що серед 2^n доданків у формулі (8) залишаться лише ті доданки, які мають множники $F = 1$. Всі інші доданки будуть дорівнювати нулю.

Крім того слід врахувати, що у випадку, коли $F|_{x_k=0} = F|_{x_k=1} = F_k(x_1,...x_{k-1},x_{k+1},...,x_n)$, $k = 1,...,n$, то $P_k = F_k$.

Очевидно, що коли $F = 0$ на всіх наборах, то і $PF = 0$, а також, коли $F = 1$ на всіх наборах, то і $PF = 1$. Якщо, наприклад $n = 3$, $F(1,1,1) = 1$, а на всіх інших наборах $F = 0$, то $PF = x_1 x_2 x_3 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$.

Аналогічні формули можна написати також і для інших булевих функцій.

Висновки. У даній роботі запропонований метод побудови метамоделей ПрО як особливої логіко-алгебраїчної системи. Такий підхід дозволяє збільшити ефективність побудови моделей ПрО, а також запропонувати нові ефективні методи розв'язання задач над ПрО.

Список літератури: **1.** *Межуєв В.І.* Лінгвістичний підхід до розгляду архітектури інструментів предметно-орієнтованого математичного моделювання // Збірник наукових праць ДонНТУ серії "Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка". – 2011. – Вип. 14(188). - С. 301-307. **2.** *Рвачев В.Л.* Метод R-функций и некоторые его приложения. К.: Наукова думка, 1985, - 550 с. **3.** *Стоян Ю.Г.* Об одном отображении комбинаторных множеств в евклидово пространство.— Харьков, 1982.—33 с. **4.** *Стоян Ю.Г.* Интервальные пространства $I_s^2(R)$. Интервальные уравнения // Докл. НАН Украины. №6, 1998.- С. 109-116. **5.** *Vitaliy Mezhuyev.* Vector logic: theoretical principles and practical implementations // Вісник ЗНУ: Збірник наукових статей. Фізико-математичні та технічні науки. – Запоріжжя: ЗНУ, 2006. – С. 91-97. **6.** *Межуев В.И.* Использование векторной алгебры для построения инструментов предметно-ориентированного моделирования // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба. – 2010. - С. 79-84. **7.** *Jonathan Westphal.* Optical Vector Logic Theorem-Proving / Jonathan Westphal, H.J. Caulfield, Jim Hardy and Lei Qian // Proceedings of the 2005 Joint Conference on Information Systems, Photonics, Networking and Computing Division. - Salt Lake. - 2005. **8.** *Аршинский Л.В.* Многозначные логики с векторной семантикой; ВСИ МВД России.-Иркутск, 2003.- 46 с.: Рус.- Деп. в ВИНИТИ 13.02.03, № 281-В2003.

Надійшла до редколегії 19.12.2011.